



УДК 51-74

**ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ШАГА КВАНТОВАНИЯ НА
ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СУБПОЛОСНОЙ МАТРИЦЫ****ASSESSMENT OF QUANTIZATION STEP ON THE SUBBAND MATRIX
EIGENVECTORS ORTHOGONALITY****Д.В.Урсол, Ю.И.Киселёв
D.V.Ursol, Y.I.Kiselev***Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia**e-mail: ursol@bsu.edu.ru*

Аннотация. В данной статье производится оценка ортогональности базиса на основе собственных векторов в зависимости от уровней квантования

Resume. This article evaluates the orthogonality of the basis depending on the quantization levels of subband matrix eigenvectors.

Ключевые слова: оценка уровня квантования, субполосные матрицы, ортогональность, базисные функции.

Keywords: assessment of the level of quantization, subband matrix, orthogonality, basis functions.

Введение

Для формирования цифровых сигналов и их обработки используются вычислительные устройства, будь то микроконтроллер, программируемая логическая интегральная схема или сигнальный процессор. Такой элемент должен обеспечивать должную скорость формирования и обработки данных. Процессор по формированию сигналов работает с данными, хранящимися в оперативной памяти или другом запоминающем устройстве. Однако скорость работы оперативной памяти и процессора существенно различаются: если бы процессор напрямую общался с оперативной памятью (читал или записывал данные), то большую часть времени попросту простаивал бы. Именно для сокращения задержек доступа к оперативной памяти и применяется кэш-память, которая значительно более скоростная в сравнении с оперативной. Фактически если оперативная память используется для того, чтобы сгладить задержки доступа к данным на накопителе, то кэш-память процессора применяется для нивелирования задержек доступа к самой оперативной памяти. Для того, чтобы кэш процессора мог выполнять свою основную задачу он должен работать гораздо быстрее, чем оперативная память.

Для обработки и форматирования оптимальных канальных сигналов [1], с точки зрения минимального уровня внеполосного излучения, требуется скорость обработки превышающая скорость потока данных, поэтому требуется хранить базисные вектора в быстро доступным для процессора месте. Так как оперативная память просто не успеет справиться с поступающими в неё данными то необходимо будет использовать кэш-память, но у кэш-памяти есть и свои минусы, она имеет небольшой объем и размещается непосредственно на процессорном кристалле.

В связи с этим появляется необходимость сжатия и оптимизации базисных функций для возможности хранения в запоминающем устройстве. В данной статье рассматривается одним из методов уменьшение битового объема информации с помощью квантования по уровню.

Экспериментальная часть

Из [1] известно, что субполосный базис обладает свойствами оптимальности с точки зрения минимального уровня внеполосного излучения. В качестве исследуемых сигналов были выбраны собственные векторы субполосных матриц. Свойство ортогональности собственных векторов позволяет записать равенство:

$$Q^T \cdot Q = 1 \quad (1)$$

где матрица $Q_1 = \{\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_J\}$ имеет размерность $[N \times J]$.

Поэтому восстановление передаваемой информации может быть осуществлено на основе операции:

$$\bar{e} = Q^T \times \bar{x} = Q^T \times Q^T \times \bar{e} = 1 \times \bar{e} \quad (2)$$

В реальных условиях, однако, необходимо формировать непрерывные сигналы, а не дискретные. Для этого естественно воспользоваться аналогией вида:



$$x(t) = \sum_{i=1}^J e_i q_i(t), t \in [0, T] \quad (3)$$

где $q(t)$ - собственные функции субполосного ядра [2] вида:

$$A(t - t_1) = (\sin[\Omega_2(t - t_1)] - \sin[\Omega_1(t - t_1)]) / \pi(t - t_1) \quad (4)$$

так, что по определению должно выполняться равенство:

$$\lambda_i q_i(t) = \int_0^T A(t - t_1) q_i(t_1) dt_1 \quad (5)$$

Здесь Ω_1 и Ω_2 границы частотного интервала в Герцах.

Вычисления показывают, что одному и тому же собственному числу соответствуют две ортогональные собственные функции, модули трансформант Фурье которых не отличаются. Поэтому представляется целесообразным использовать аппроксимации:

$$\hat{q}_{2k-1}(t) = u_k(t) \cos(\Omega_c t) \quad (6)$$

$$\hat{q}_{2k}(t) = u_k(t) \sin(\Omega_c t) \quad (7)$$

$$\lambda_k u_k = \int_0^T A_0(t - \tau) u_k(\tau) d\tau \quad (8)$$

$$A_0(\tau) = \sin\left[\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \tau\right] / \pi \quad (9)$$

где $k = 1, 2, \dots, J/2$;

$$\Omega_c = (\Omega_2 + \Omega_1) / 2 \quad (10)$$

$$J = (\Omega_2 - \Omega_1) T / 2\pi \quad (11)$$

причем предполагается выполнение условия

$$(\Omega_2 - \Omega_1) T / 2\pi \gg 8 \quad (12)$$

так как, только в этом случае будет порядка $J/2$ собственных чисел мало отличающихся от единицы.

Для вычисления аппроксимаций собственных функций согласно соотношению (5) следует использовать квадратурную формулу, например прямоугольников:

$$\lambda_i q_i(k\Delta t) = \Delta t \sum_{n=0}^N A(\Delta t(k - n)) q_i(n\Delta t) \quad (13)$$

выбрав достаточно малый шаг дискретизации

$$\Delta t = T / N \quad (14)$$

Целью дальнейшего является исследование, с точки зрения эффективности формирования канальных сигналов, свойств предлагаемых аппроксимаций, а именно:

- возможность построения на этой основе ортогонального базиса;
- оценивание вероятностей ошибочных решений при приеме сигналов на основе правила и наоборот.

$$z_i = \int_0^T \hat{x}(t) \hat{q}_i(t) dt \gg 0 \Rightarrow e_i = 1 \quad (15)$$

Здесь $\hat{x} = \bar{x} + \bar{e}$.

Естественно, что как при формировании так и при обработке канальных сигналов интегралы заменяются суммами, что означает дискретизацию в том числе и огибающих. Поэтому собственные функции выполняются в дискретном наборе точек согласно (5).

В таблице 1 приведены результаты вычислений при выполнении неравенства (10) скалярных произведений аппроксимаций вида (6) и (7). Легко понять, что получаемый таким образом базис будет ортогональным.



Таблица 1
Table 1

**Полученная (исходная) матрица скалярных произведений аппроксимации
собственных векторов**
The resulting (default) matrix of scalar products eigenvectors

	\hat{q}_1	\hat{q}_2	\hat{q}_3	\hat{q}_4	\hat{q}_5	\hat{q}_6	\hat{q}_7	\hat{q}_8	\hat{q}_9	\hat{q}_{10}
\hat{q}_1	1,0e+00	2,9e-16	4,9e-16	-9,8e-17	6,1e-17	2,7e-17	-9,1e-18	8,4e-17	-6,8e-17	-7,0e-17
\hat{q}_2	2,9e-16	1,0e+00	-3,3e-17	-8,2e-17	-8,6e-17	-1,9e-17	5,7e-17	-3,0e-17	1,5e-17	9,3e-17
\hat{q}_3	4,9e-16	-3,3e-17	1,0e+00	3,5e-17	9,7e-17	2,3e-16	1,5e-17	-9,5e-17	-5,8e-17	8,5e-17
\hat{q}_4	-9,8e-17	-8,2e-17	3,5e-17	1,0e+00	-3,8e-17	5,6e-17	-4,7e-17	3,3e-18	4,6e-17	-1,5e-16
\hat{q}_5	6,1e-17	-8,6e-17	9,7e-17	-3,8e-17	1,0e+00	-1,5e-16	7,0e-17	7,6e-17	6,0e-17	9,9e-18
\hat{q}_6	2,7e-17	-1,9e-17	2,3e-16	5,6e-17	-1,5e-16	1,0e+00	-9,7e-17	4,9e-17	-5,9e-17	-6,3e-18
\hat{q}_7	-9,1e-18	5,7e-17	1,5e-17	-4,7e-17	7,0e-17	-9,7e-17	1,0e+00	6,9e-18	4,2e-17	3,5e-17
\hat{q}_8	8,4e-17	-3,0e-17	-9,5e-17	3,3e-18	7,6e-17	4,9e-17	6,9e-18	1,0e+00	-7,6e-17	-4,9e-17
\hat{q}_9	-6,8e-17	1,5e-17	-5,8e-17	4,6e-17	6,0e-17	-5,9e-17	4,2e-17	-7,6e-17	1,0e+00	-3,9e-16
\hat{q}_{10}	-7,0e-17	9,3e-17	8,5e-17	-1,5e-16	9,9e-18	-6,3e-18	3,5e-17	-4,9e-17	-3,9e-16	1,0e+00

Для проведения экспериментов по изменению уровня квантования собственных функций субполосной матрицы Q был использован математический пакет MatLab.

Квантование по уровню является процессом преобразования сигнала по множеству в сигнал с конечным числом значений и непосредственно связано с операцией округления, реализуемой нелинейным элементом, называемым шагом квантования.

Шаг квантования определяет число уровней квантования или разрешающую способность ЦАП. Для нахождения шага квантования была использована операция:

$$\Delta = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2^m} \quad (16)$$

где m – разрядность квантования, а U_{\max} и U_{\min} определяются:

$$U_{\max} = \max(Q(n, j)), n = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, J \quad (17)$$

$$U_{\min} = \min(Q(n, j)), n = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, J \quad (18)$$

где $Q(n, j)$ – элемент матрицы с размерностью $[N \times J]$.

Для осуществления операции квантования необходимо выполнить следующее:

$$Q^*(n, j) = \text{sign}[Q(n, j)] \left[\frac{Q(n, j)}{\Delta} + 0.5 \right], n = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, J \quad (19)$$

Изменяя таким образом m (разрядность квантования), т.е. изменяя шаг квантования, были получены различные значения скалярного произведения собственных векторов субполосной матрицы Q .

В качестве исходных данных для проведения эксперимента были выбраны:

- Субполосная матрица собственных векторов - Q , размерностью $[64 \times 10]$
- Частота дискретизации - $F_d = 3.27 \text{ кГц}$
- Ширина полосы - $B_w = 1 \text{ кГц}$
- Количество бит на значения - $N = 64$
- Разрядность квантования - $m = [16, 8, 4, 2]$

В таблице 2 приведен результат выполнения неравенства (19), при $m = 16$, используя полученные значения неравенств (16), (17) и (18) включительно:

Таблица 2
Table 2

**Матрица скалярных произведений аппроксимации собственных векторов
при уровне квантования $m=16$
Matrix of scalar products eigenvectors at the level of quantization $m = 16$**

	\hat{q}_1	\hat{q}_2	\hat{q}_3	\hat{q}_4	\hat{q}_5	\hat{q}_6	\hat{q}_7	\hat{q}_8	\hat{q}_9	\hat{q}_{10}
\hat{q}_1	0,9312	4,8e-03	4,8e-03	2,7e-03	8,0e-03	1,0e-02	1,7e-03	1,3e-02	1,4e-02	9,4e-03
\hat{q}_2	4,8e-03	0,8964	-2,0e-2	-1,5e-2	-5,8e-3	-9,9e-3	-1,3e-2	-6,6e-3	-5,3e-3	-6,8e-03
\hat{q}_3	4,8e-03	-2,0e-2	0,8979	-1,4e-2	-3,9e-3	-5,0e-3	-1,3e-2	-7,1e-03	-1,2e-3	-6,2e-03
\hat{q}_4	2,7e-03	-1,5e-2	-1,4e-2	0,8976	-6,7e-3	-9,0e-3	-1,1e-02	-6,4e-3	-6,0e-4	-3,0e-03
\hat{q}_5	8,0e-03	-5,8e-3	-3,9e-3	-6,7e-3	0,9138	-7,0e-4	-4,1e-3	-7,0e-4	3,5e-03	0,0e+00
\hat{q}_6	1,0e-02	-9,9e-3	-5,0e-3	-9,0e-3	-7,0e-4	0,9059	-1,1e-02	-1,2e-3	5,3e-03	3,3e-03
\hat{q}_7	1,7e-03	-1,3e-2	-1,3e-2	-1,1e-02	-4,1e-3	-1,1e-02	0,8976	-5,9e-3	9,0e-04	-6,0e-03
\hat{q}_8	1,3e-02	-6,6e-3	-7,1e-03	-6,4e-3	-7,0e-4	-1,2e-4	-5,9e-3	0,907	7,9e-03	1,5e-03
\hat{q}_9	1,4e-02	-5,3e-3	-1,2e-3	-6,0e-4	3,5e-03	5,3e-03	9,0e-04	7,9e-03	0,9208	6,6e-03
\hat{q}_{10}	4,7e-05	-4,2e-5	-2,0e-5	-3,2e-5	-4,5e-6	-2,6e-6	-3,7e-5	-8,4e-6	2,5e-05	9,40e-3

В качестве исходных данных для проведения эксперимента были выбраны:

- Субполосная матрица собственных векторов - Q , размерностью $[64 \times 10]$
- Частота дискретизации - $F_d = 3.27 \text{ кГц}$
- Ширина полосы - $B_w = 1 \text{ кГц}$
- Количество бит на значения - $N = 64$
- Разрядность квантования - $m = [16, 8, 4, 2]$

В таблице 3 приведен результат выполнения неравенства (19), при $m = 8$, используя полученные значения неравенств (16), (17) и (18) включительно:

Таблица 3
Table 3

**Матрица скалярных произведений аппроксимации собственных векторов
при уровне квантования $m=8$
Matrix of scalar products eigenvectors at the level of quantization $m = 8$**

	\hat{q}_1	\hat{q}_2	\hat{q}_3	\hat{q}_4	\hat{q}_5	\hat{q}_6	\hat{q}_7	\hat{q}_8	\hat{q}_9	\hat{q}_{10}
\hat{q}_1	0,9991	0,0029	-0,0030	0,0011	0,0005	-0,0025	0,0029	-0,0028	0,0004	-0,0003
\hat{q}_2	0,0029	0,9945	0,0036	-0,0003	-0,0075	-0,0001	-0,0015	0,0005	-0,0002	-0,0001
\hat{q}_3	-0,0030	0,0036	0,9928	-0,0011	0,0000	-0,0021	-0,0006	0,0000	-0,0022	0,0013
\hat{q}_4	0,0011	-0,0003	-0,0011	0,9958	-0,0019	0,0035	0,0035	0,0008	0,0027	-0,0049
\hat{q}_5	0,0005	-0,0075	0,0000	-0,0019	0,9886	-0,0024	-0,0028	0,0019	-0,0001	-0,0034
\hat{q}_6	-0,0025	-0,0001	-0,0021	0,0035	-0,0024	0,9955	0,0006	0,0013	0,0014	-0,0032
\hat{q}_7	0,0029	-0,0015	-0,0006	0,0035	-0,0028	0,0006	0,9989	-0,0014	0,0005	-0,0002
\hat{q}_8	-0,0028	0,0005	0,0000	0,0008	0,0019	0,0013	-0,0014	0,9952	0,0010	-0,0023
\hat{q}_9	0,0004	-0,0002	-0,0022	0,0027	-0,0001	0,0014	0,0005	0,0010	0,9927	0,0000
\hat{q}_{10}	-0,0003	-0,0001	0,0013	-0,0049	-0,0034	-0,0032	-0,0002	-0,0023	0,0000	0,9911

В качестве исходных данных для проведения эксперимента были выбраны:

- Субполосная матрица собственных векторов - Q , размерностью $[64 \times 10]$
- Частота дискретизации - $F_d = 3.27 \text{ кГц}$
- Ширина полосы - $B_w = 1 \text{ кГц}$
- Количество бит на значения - $N = 64$
- Разрядность квантования - $m = [16, 8, 4, 2]$



В таблице 4 приведен результат выполнения неравенства (19), при $m = 4$, используя полученные значения неравенств (16), (17) и (18) включительно :

Таблица 4
Table 4

**Матрица скалярных произведений аппроксимации собственных векторов
при уровне квантования $m=4$
Matrix of scalar products eigenvectors at the level of quantization $m = 4$**

	\hat{q}_1	\hat{q}_2	\hat{q}_3	\hat{q}_4	\hat{q}_5	\hat{q}_6	\hat{q}_7	\hat{q}_8	\hat{q}_9	\hat{q}_{10}
\hat{q}_1	0,7762	0,0140	-0,0629	-0,0070	-0,0210	0,0210	-0,0490	-0,0070	-0,0350	-0,0140
\hat{q}_2	0,0140	0,8112	0,0070	-0,0070	-0,0280	-0,0699	0,0490	0,0420	0,0839	0,0140
\hat{q}_3	-0,0629	0,0070	0,7832	-0,0210	0,0070	0,0140	-0,0280	-0,0210	0,0140	-0,0350
\hat{q}_4	-0,0070	-0,0070	-0,0210	0,7902	-0,0070	0,0559	0,0559	-0,0140	-0,0420	0,0559
\hat{q}_5	-0,0210	-0,0280	0,0070	-0,0070	0,7762	-0,0210	0,0070	-0,0070	0,0420	0,0000
\hat{q}_6	0,0210	-0,0699	0,0140	0,0559	-0,0210	0,7483	0,0000	0,0070	-0,0140	-0,0420
\hat{q}_7	-0,0490	0,0490	-0,0280	0,0559	0,0070	0,0000	0,8112	0,0140	0,0979	0,0070
\hat{q}_8	-0,0070	0,0420	-0,0210	-0,0140	-0,0070	0,0070	0,0140	0,7692	0,0000	0,0000
\hat{q}_9	-0,0350	0,0839	0,0140	-0,0420	0,0420	-0,0140	0,0979	0,0000	0,8531	0,0000
\hat{q}_{10}	-0,0140	0,0140	-0,0350	0,0559	0,0000	-0,0420	0,0070	0,0000	0,0000	0,9231

В качестве исходных данных для проведения эксперимента были выбраны:

- Субполосная матрица собственных векторов - Q , размерностью $[64 \times 10]$
- Частота дискретизации - $F_d = 3.27 \text{ кГц}$
- Ширина полосы - $B_w = 1 \text{ кГц}$
- Количество бит на значения - $N = 64$
- Разрядность квантования - $m = [16, 8, 4, 2]$

В таблице 5 приведен результат выполнения неравенства (19), при $m = 2$, используя полученные значения неравенств (16), (17) и (18) включительно :

Таблица 5
Table 5

**Матрица скалярных произведений аппроксимации собственных векторов
при уровне квантования $m=2$
Matrix of scalar products eigenvectors at the level of quantization $m = 2$**

	\hat{q}_1	\hat{q}_2	\hat{q}_3	\hat{q}_4	\hat{q}_5	\hat{q}_6	\hat{q}_7	\hat{q}_8	\hat{q}_9	\hat{q}_{10}
\hat{q}_1	0,8333	0,1667	0,0000	-0,2500	0,0000	-0,0833	-0,1667	0,0000	0,0000	0,0000
\hat{q}_2	0,1667	0,8333	-0,0833	0,0000	-0,2500	-0,2500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
\hat{q}_3	0,0000	-0,0833	0,7500	0,0000	0,2500	-0,1667	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
\hat{q}_4	-0,2500	0,0000	0,0000	0,9167	0,0833	-0,0833	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
\hat{q}_5	0,0000	-0,2500	0,2500	0,0833	0,9167	-0,0833	0,0833	0,0000	0,0000	0,0000
\hat{q}_6	-0,0833	-0,2500	-0,1667	-0,0833	-0,0833	0,9167	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
\hat{q}_7	-0,1667	0,0000	0,0000	0,0000	0,0833	0,0000	0,7500	0,0000	-0,1667	0,0000
\hat{q}_8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	0,1667
\hat{q}_9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,1667	0,0000	0,6667	0,0000
\hat{q}_{10}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1667	0,0000	0,6667

Заключение

По результатам скалярных произведений собственных векторов, приведенных в таблице следует, что искажения полученных данных, вызванные квантованием по уровню 2^{16} , являются допустимыми. При уровне квантования 2^8 выявляются заметные, но также допустимые искажения. Начиная



с 2⁴ уровня квантования и ниже искажения не позволяют использовать такой базис для формирования и обработки сигналов.

Список литературы References

1. Жиляков Е.Г., Белов С.П., Урсол Д.В. Оптимальные каналные сигналы при цифровой передаче с частотным уплотнением - Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – № 7(62), Вып. 10/1 2009. - с.166 – 172.

Zhilyakov E.G., Belov S.P., Ursol D.V. Optimalniye kanalniye signaly pri cifrovoj peredache s chastotnym uplotneniem - Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika - № 7(62), Вып. 10/1 2009. - s.166 – 172.

2. Жиляков Е.Г. Вариационные методы анализа и построения функций по эмпирическим данным: моногр. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.

Zhilyakov E.G. Variacionnye metody analiza i postroeniya funkcij po ehmpiricheskim dannym: monogr. – Belgorod: Izd-vo BelGU, 2007. – 160 s.

3. Кузнецов М.А., Абатуров П.С., Никодимов И.Ю., Певцов Н.В., Рыжков А.Е., Сиверс М.А. GPRS – технология пакетной передачи данных в сетях GSM СПб: Судостроение, 2002. – 144с.

Kuznecov M.A., Abaturon P.S., Nikodimov I.YU., Pevcov N.V., Ryzhkov A.E., Sivers M.A. GPRS – tekhnologiya paketnoj peredachi dannyh v setyah GSM SPb: Sudostroenie, 2002. – 144s.